Diplomarbeit — Silver Machines

Boris Piwinger

5. Mai 1997

Zusammenfassung

In dieser Arbeit entwickle ich das Konzept der Silver Machines. Vermöge einer speziellen Maschine — der Koepke-Richardson-Silver-Machine — wird das Starke Covering Lemma ohne Benutzung der Feinstrukturtheorie bewiesen.

Inhalt

0 Einführung

Einleitung

Silver Machines ermöglichen eine andere Sicht auf das konstruktible Universum, das Kurt Gödel 1938 eingeführt hat. Dieses Maschinenkonzept wurde zuerst von Jack Silver entwickelt, der das Wort *Maschine* aus seiner Motivation heraus gewählt hat, die ihn dazu brachte, diese zu entwerfen. Man könnte sie genauso gut „Silver-Hierarchie“ nennen, da Silver Machines beschreiben, wann Mengen entstehen — ähnlich wie in der Jensen-Hierarchie. Ein auf ähnlichen Ideen basierender Zugang geht auf Friedman und Koepke [5] zurück. Die vorliegende Arbeit knüpft sehr stark an die Dissertation von Thomas Lloyd Richardson [4], einem Studenten von Silver, sowie an einige Vorträge meines Betreuers, Peter Koepke, an.

Das konstruktible Universum L der Mengenlehre ist als die Klasse der Mengen definiert, die sich aus dem folgenden transfiniten Prozeß ergeben: Wir beginnen mit einem leeren L_0, für bereits definiertes L_α bestehe $L_{\alpha+1}$ aus allen Teilmengen von L_α, die durch $\in$-Formeln definierbar sind, und für Limesordinalzahlen λ nehmen wir die Vereinigung aller vorherigen Stufen der Konstruktion, $L_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} L_\alpha$. Schließlich sei $L = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{On}} L_\alpha$.
Es erweist sich, daß L das kleinste Modell der Mengenlehre ist, d.h., es ist eine Teilklasse aller anderen Modelle. Als eine Konsequenz der sehr konkreten Definition hat L einige fundamentale Eigenschaften, die in ZFC alleine nicht entscheidbar sind. Tatsächlich hat Gödel dieses Modell definiert, um die Konsistenz von ZFC und der Kontinuumshypothese (CH) zu zeigen. Dieser Beweis beruht auf dem *Kondensationslemma*, das aussagt, daß Σ_1-Substrukturen von L zu Stufen von L kondensieren.

Im Kontrast zu dieser Einfachheit gibt es kompliziertere Aussagen, z.B. kombinatorische Prinzipien (wie das $\Box$-Prinzip) oder das Covering Lemma. Es

war Ronald Jensen, der 1972 eine Lösung für derartige Probleme gefunden hat, die sogenannte *Feinstrukturtheorie*. Die Idee besteht darin, den Übergang von L_α zu $L_{\alpha+1}$ genauer zu betrachten und diesen Prozeß mittels einer „Buchhaltung“ zu beschreiben. Auch heute noch — nach 25-jähriger Entwicklung — ist diese Methode extrem kompliziert und mühsam.

Ebenfalls in den frühen siebziger Jahren fand Jack Silver einen anderen Zugang — die Silver Machines. Diese Maschinen reduzieren die Betrachtungen auf Berechnungen mit Ordinalzahlmengen. Ähnlich wie für L wird eine neue Hierarchie für diese Mengen, M^δ, definiert. Analog zum Kondensationslemma haben wir eine *Collapsing Property*, d.h., abgeschlossene Strukturen (die vermöge eines Hüllenoperators erzeugt werden) kondensieren zu Stufen der Maschine. Anders als beim konstruktiblen Universum passiert jedoch wenig beim Übergang von M^δ zu $M^{\delta+1}$. Dies wird durch eine gewisse *Finiteness Property* sichergestellt, die alle Informationen, die für diesen Schritt benötigt werden, in einer endlichen Menge, die selbst von einfacher Form ist, kodiert. Diese Grundlagen werden im ersten Kapitel entwickelt.

Die Koepke-Richardson-Silver-Machine, die im zweiten Kapitel definiert wird, besteht aus Funktionen, die für die Kodierung und Dekodierung von Ordinalzahlfolgen benutzt werden, aus einer Wahrheitsfunktion und einer Skolemfunktion. Die letzteren stellen die Beziehung zwischen der Maschine und der Situation in L her.

Das Covering Lemma* sagt aus, daß — unter der Annahme, daß $0^\sharp$ nicht existiert — jede überabzählbare Ordinalzahlmenge von einer Menge aus L mit gleicher Kardinalität überdeckt wird. Es wird im dritten Kapitel als Anwendung der Koepke-Richardson-Silver-Machine bewiesen. Abschließend zeigen wir das Starke Covering Lemma, eine Verstärkung der vorstehenden Aussage, namentlich die Erweiterung auf Strukturen.

*Traditionell heißt es Lemma, jedoch wäre Satz passender, und es wird auch gelegentlich so genannt. Wie dem auch sei, wir bleiben bei der traditionellen Bezeichnung.

Notationen

Die grundlegenden Konzepte der Mengenlehre (insbesondere das konstruktible Universum L) werden als bekannt vorausgesetzt. Alle Schreibweisen und Definitionen, die nicht ausdrücklich eingeführt werden, sind Standard und können, beispielsweise, in Drake [2] gefunden werden.

Wir benutzen die üblichen logischen Symbole: $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\neg$ (nicht), $\exists$ (es existiert), $\forall$ (für alle), $\rightarrow$ (impliziert), (und) (Klammern)

Für zwei Mengen x und y schreiben wir $x \cong y$, wenn x und y isomorph sind (d.h., es gibt eine bijektive Funktion von x nach y, die alle Strukturen auf x erhält; die Strukturen werden aus dem Kontext klar werden). Weiterhin schreiben wir $x \subset y$, wenn x eine (nicht notwendig echte) Teilmenge von y ist. Für die Menge aller Teilmengen von x mit Kardinalität κ schreiben wir $[x]^\kappa$. Für eine Ordinalzahlmenge X sei $\operatorname{lub} X$ (least upper bound) das kleinste δ mit $X \subset \delta$. Wie üblich bezeichnen kleine griechische Buchstaben Ordinalzahlen.

Sei $f\colon x \rightarrow y$; wir schreiben $\operatorname{dom} f$ für die Domain und $\operatorname{range} f$ für den Range von f, s.d. $f \subset \operatorname{range} f \times \operatorname{dom} f$. Die Menge aller Funktionen f mit Domain x und $\operatorname{range} f \subset y$ wird als ${}^x y$ notiert. ${}^{<\omega}x$ ist die Menge aller endlichen Folgen in x. Wenn x und y geordnete Mengen sind und f eine Bijektion, die diese respektiert, dann schreiben wir $f\colon x \xleftrightarrow{\text{o.p.}} y$. Schließlich ist f eine partielle Funktion $f\colon x \rightharpoonup y$, falls $\operatorname{dom} f \subset x$. Für zwei partielle Funktionen f und g schreiben wir $f(x) \simeq g(x)$, um auszudrücken, daß $f(x)$ definiert ist gdw. $g(x)$ definiert ist, in welchem Falle sie übereinstimmen. Weiterhin $f(x)\downarrow$ gdw. f in x definiert ist, sonst $f(x)\uparrow$.

$\langle B, \leq \rangle$ heißt gerichtete partielle Ordnung, wenn es eine partielle Ordnung (eine transitive und reflexive Relation) ist und $\forall a, b {\in} B\ \exists c {\in} B\ (a \leq c \wedge b \leq c)$ gilt. Sei $Z = \langle \gamma_b, \in \rangle_{b \in B}, \langle \pi_{b_1 b_2} \rangle_{b_1 \leq b_2}$ ein kommutatives System von Abbil-

dungen, d.h., $\pi_{b_1 b_2}\colon \langle \gamma_{b_1}, \in \rangle \to \langle \gamma_{b_2}, \in \rangle$ ist ordnungserhaltend und, wenn $b_1 \le b_2 \le b_3$, dann $\pi_{b_1 b_3} = \pi_{b_2 b_3} \circ \pi_{b_1 b_2}$. Dann heißt $\langle A, E, \pi_b \rangle_{b \in B}$ gerichteter Limes des gerichteten Systems Z gdw.

i) $\pi_b\colon \langle \gamma_b, \in \rangle \to \langle A, E \rangle$ ist ordnungserhaltend,

ii) $A = \bigcup_{b \in B} \operatorname{range} \pi_b$ und

iii) wenn $b_1 \le b_2$, dann $\pi_{b_2} \circ \pi_{b_1 b_2} = \pi_{b_1}$.

Wir nennen dieses System wohlfundiert gdw. $\langle A, E \rangle$ wohlfundiert ist. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß je zwei gerichtete Limites eines Systems isomorph sind; daher können wir im Falle, daß $\langle A, E \rangle$ wohlfundiert ist, $\langle \gamma, \in \rangle$ als *den* gerichteten Limes nehmen, wobei γ der transitive Kollaps von $\langle A, E \rangle$ ist.

1 Silver Machines

Wir beginnen mit einer Reihe von Definitionen. Zunächst der allgemeine Begriff einer Maschine und der fundamentale Abschluß- oder Hüllenoperator.

Definition 1 (Maschinen) Eine Folge $M = (\mathrm{On}, <, M_i)_{i<\omega}$, wobei M_i eine partielle (Klassen-) Funktion $M_i\colon {}^{<\omega}\mathrm{On} \rightharpoonup \mathrm{On}$ (für alle $i < \omega$) ist, heißt *Maschine*.

Für $\delta \in \mathrm{On}$ setzen wir $M^\delta = \left(\delta, < \cap\, \delta^2, M_i^\delta\right)_{i<\omega}$, wobei $M_i^\delta = M_i \cap (\delta \times {}^{<\omega}\delta)$.

Gemäß dieser Definition ist eine Maschine im wesentlichen eine abzählbare Folge von Funktionen. Intuitiv könnte man diese Funktionen als Algorithmen zur Erzeugung neuer Mengen aus einem Input sehen. Die „Stufen" M^δ dieser Maschine beschränken die Berechnungen, so daß wir Mengen an Stelle von Klassen erhalten. Die Idee der Stufen ist, daß, wenn die Stufe M^δ der Maschine (als Operator) auf eine Ordinalzahlmenge X angewandt wird, wir alle Mengen erhalten, die aus X in δ-vielen Schritten berechnet werden können.

Definition 2 (Abschluß) Für $\delta \in \mathrm{On}$ und $X \subset \delta$ sei

$$M^\delta[X] = \bigcap \left\{ Y \,\middle|\, X \subset Y \subset \delta \wedge \forall i \in \omega\; M_i^\delta\left[{}^{<\omega}Y\right] \subset Y \right\}.$$

$M^\delta[X]$ ist der *Abschluß* der Menge X unter der Stufe δ der Maschine M.

Für eine Maschine M und eine Ordinalzahl δ heißt eine Menge X M^δ-*abgeschlossen* ($\mathrm{cl}_M^\delta(X)$) gdw. $X \subset \delta$ und $M^\delta[X] = X$.

Nun können wir erklären, was wir unter isomorph bezüglich einer Maschine verstehen wollen: Für ein δ und eine M^δ-abgeschlossene Menge X schreiben wir $M^{\bar\delta} \cong X$ gdw. es eine ordnungserhaltende Bijektion π von $M^{\bar\delta}$ nach X gibt mit

$$\forall i < \omega\; \forall u \in {}^{<\omega}\bar\delta\;\; \pi\Big(M_i^{\bar\delta}(u)\Big) \simeq M_i^\delta\,(\pi(u))\,.$$

Die nächste Eigenschaft beschreibt eine Maschinenstruktur, die langsam und kohärent wächst. Sie führt zum Begriff der Silver Machine.

Definition 3 (Finite Support Property — FSP) Eine Maschine M erfüllt die *Finite Support Property* (*FSP*) gdw. es für alle $\delta \in \mathrm{On}$ eine endliche Menge $H_\delta \subset \delta$ gibt, s.d.:

i) $H_\delta \subset M^{\delta+1}[\{\delta\}]$

ii) Wenn X M^δ-abgeschlossen mit $H_\delta \subset X$ und $M^{\bar{\delta}} \cong X$ ist, dann ist $X \cup \{\delta\}$ $M^{\delta+1}$-abgeschlossen mit $M^{\bar{\delta}+1} \cong (X \cup \{\delta\})$.

Intuitiv heißt das, daß der Schritt von der Stufe δ zur Stufe $\delta + 1$ durch nur endlich viele Ordinalzahlen kodiert werden kann und daß die Berechnungen früherer Stufen erhalten bleiben.

Definition 4 (Silver Machine) Eine Maschine, die FSP erfüllt, heißt *Silver Machine*.

Im Rest dieses Kapitels arbeiten wir einige Konsequenzen dieser Definition heraus, man könnte sagen, wir zerlegen FSP in handliche Eigenschaften. Die erste ist das Analogon zum Kondensationslemma in L. Grob gesprochen sagt die Collapsing Property aus, daß abgeschlossene Strukturen von einer einfachen, kohärenten Form sind.

Definition 5 (Collapsing Property) Eine Maschine M erfüllt die *Collapsing Property* gdw.: immer, wenn X M^δ-abgeschlossen ist (für ein $\delta \in \mathrm{On}$), dann ist $M^{\bar{\delta}} \cong X$, wobei $\bar{\delta} = \mathrm{otp}(X)$.

Satz 1 *Silver Machines erfüllen die Collapsing Property.*

Beweis Für $\delta \in \mathrm{On}$ und ein M^δ-abgeschlossenes X sei $\bar{\delta} = \mathrm{otp}(X)$ und $\pi \colon \bar{\delta} \xleftrightarrow{\text{o.p.}} X$. Erweitere π durch $\pi\left(\bar{\delta}\right) = \delta$. Bemerke zunächst das folgende triviale Faktum:

$$\forall \bar{\eta} \leq \bar{\delta} \ \mathrm{cl}_M^{\pi(\bar{\eta})}\left(X \cap \pi\left(\bar{\eta}\right)\right)$$

Um dies zu sehen, beachte, daß $M^{\pi(\bar{\eta})}[X \cap \pi(\bar{\eta})] \subset M^{\delta}[X \cap \pi(\bar{\eta})] \cap \pi(\bar{\eta}) \subset X \cap \pi(\bar{\eta})$.

Wir zeigen induktiv: $\forall \bar{\eta} \leq \bar{\delta}\ M^{\bar{\eta}} \cong X \cap \pi(\bar{\eta})$ (Dies impliziert $M^{\bar{\delta}} \cong X$.) Für $\bar{\eta} = 0$ und $\lim \bar{\eta}$ ist dies klar. Daher nimm $\bar{\eta} = \bar{\mu} + 1$ an, und es sei $\mu = \pi(\bar{\mu}) \in X$. Nach Induktionsannahme haben wir $M^{\bar{\mu}} \cong X \cap \mu$. Nach dem Faktum wissen wir $\mathrm{cl}^{\mu}_{M}(X \cap \mu)$. Wegen FSP gibt es ein $H_{\mu} \subset M^{\mu+1}[\{\mu\}] \cap \mu \subset X \cap \mu$. Daher $M^{\bar{\mu}+1} \cong (X \cap \mu) \cup \{\mu\} = X \cap \pi(\bar{\mu}+1)$, was zu zeigen war. $\dashv$

Bermerkung 1 *Sei M eine Maschine, die die Collapsing Property erfüllt. Wenn $\delta \in \mathrm{On}$ und $X \subset \delta$, dann $\pi\colon M^{\bar{\delta}} \cong M^{\delta}[X]$ und $\bar{\delta} = M^{\bar{\delta}}[\bar{X}]$, wobei $\bar{\delta} = \mathrm{otp}\left(M^{\delta}[X]\right)$, $\pi\colon \bar{\delta} \xleftrightarrow{o.p.} M^{\delta}[X]$ und $\pi[\bar{X}] = X$.*

Beweis Sei die Situation wie in der Bemerkung. Aus obigem Satz erhalten wir $M^{\bar{\delta}} \cong M^{\delta}[X]$. Seien $\bar{Y} = M^{\bar{\delta}}[\bar{X}]$ und $Y = \pi[\bar{Y}]$. Dann ist Y M^{δ}-abgeschlossen mit $X \subset Y$, also $M^{\delta}[X] \subset Y$. Daher $\bar{Y} = \bar{\delta}$. $\dashv$

Definition 6 (Kollabierungsfunktion, Strukturerhaltend) Sei X für ein $\delta \in \mathrm{On}$ M^{δ}-abgeschlossen und $\pi\colon M^{\bar{\delta}} \cong X$. Dann nennen wir π *Kollabierungsfunktion*. In diesem Fall schreiben wir auch $\pi\colon \bar{\delta} \cong X$ $(= \mathrm{range}\,\pi)$ oder $\pi\colon \bar{\delta} \cong \delta$ ($\mathrm{range}\,\pi$ ist M^{δ}-abgeschlossen). Wenn $\pi\colon \bar{\delta} \to \delta$ und $\mathrm{range}\,\pi$ $M^{\delta'}$-abgeschlossen für ein $\delta' \leq \delta$ ist, dann heißt π *strukturerhaltend*.

Wir bemerke, daß die folgenden Aussagen nach der Collapsing Property äquivalent sind:

i) $\pi\colon \bar{\delta} \cong \delta$

ii) π ist ordnungserhaltend und $\forall i < \omega\ \forall u \in {}^{<\omega}\bar{\delta}\ \pi\Big(M_i^{\bar{\delta}}(u)\Big) \simeq M_i^{\delta}(\pi(u))$.

iii) π ist ordnungserhaltend und $M^{\delta}[\mathrm{range}\,\pi] \subset \mathrm{range}\,\pi$.

Weiterhin ist $\pi\colon \bar{\delta} \to \delta$ strukturerhaltend gdw. π ordnungserhaltend ist und für $i < \omega$ und $u \in {}^{<\omega}\bar{\delta}$, wenn $M_i^{\bar{\delta}}(u)\!\downarrow$, dann $M_i^{\delta}(\pi(u))\!\downarrow$ und $\pi\Big(M_i^{\bar{\delta}}(u)\Big) = M_i^{\delta}(\pi(u))$.

Proposition 1

i) Jede Kollabierungsfunktion ist strukturerhaltend.

ii) Seien $\pi_0\colon \delta_0 \cong \delta_1$ *und* $\pi_1\colon \delta_1 \cong \delta_2$. *Dann* $\pi_1 \circ \pi_0\colon \delta_0 \cong \delta_2$.

iii) Seien $\pi_0\colon \delta_0 \cong \delta_1$ *und* $\pi_1\colon \delta_2 \cong \delta_3$, *wobei* $\operatorname{range}\pi_0 \subset \operatorname{range}\pi_1$. *Dann* $\pi_1^{-1} \circ \pi_0\colon \delta_0 \cong \delta_2$.

iv) Wenn $\pi\colon \delta_0 \to \delta_1$ *strukturerhaltend ist, dann* $\pi\colon \delta_0 \cong \operatorname{lub}(\operatorname{range}\pi)$.

v) Seien $\pi_0\colon \delta_0 \to \delta_1$ *und* $\pi_1\colon \delta_2 \to \delta_3$ *strukturerhaltend, wobei* $\operatorname{range}\pi_0 \subset \operatorname{range}\pi_1$. *Dann ist* $\pi_1^{-1} \circ \pi_0\colon \delta_0 \to \delta_2$ *strukturerhaltend.* $\dashv$

i) – iii) sind per definitionem klar. Für iv) bemerke, daß per definitionem $\operatorname{cl}_M^{\delta_2}(\operatorname{range}\pi)$ für ein $\delta_2 \leq \delta_1$. Offensichtlich ist $\operatorname{lub}(\operatorname{range}\pi) \leq \delta_2$. Daher gilt $M^{\operatorname{lub}(\operatorname{range}\pi)}[\operatorname{range}\pi] \subset M^{\delta_2}[\operatorname{range}\pi] \subset \operatorname{range}\pi$ und folglich $\operatorname{cl}_M^{\operatorname{lub}(\operatorname{range}\pi)}(\operatorname{range}\pi)$. v) folgt unmittelbar aus iii) und iv).

Die nächste Eigenschaft sagt aus, daß lediglich die Kenntnis einer endlichen Ordinalzahlmenge notwendig ist, um zu verstehen, was bei einer zusätzlichen Berechnungsstufe passiert.

Definition 7 (Finiteness Property) Eine Maschine M erfüllt die *Finiteness Property* gdw. es für alle $\delta \in \mathrm{On}$ eine endliche Menge $F_\delta \subset \delta$ gibt, s.d. für alle $X \subset \delta + 1$ gilt: $M^{\delta+1}[X] \subset M^{\delta}[(X \cap \delta) \cup F_\delta] \cup \{\delta\}$.

Satz 2 *Silver Machines erfüllen die Finiteness Property.*

Beweis Wähle $F_\delta = H_\delta$. Dann ist nach FSP die rechte Seite $M^{\delta+1}$-abgeschlossen. Da X eine Teilmenge der rechten Seite ist, gilt dies ebenfalls für den $M^{\delta+1}$-Abschluß. $\dashv$

Definition 8 (Direct Limit Property) Eine Maschine M erfüllt die *Direct Limit Property* gdw. das folgende gilt: Sei $Z = \langle \gamma_b, \in \rangle_{b \in B}, \langle \pi_{b_1 b_2} \rangle_{b_1 \leq b_2}$ ein wohlfundiertes gerichtetes System mit gerichtetem Limes $\langle \gamma, \in, \pi_b \rangle_{b \in B}$. Wenn jedes $\pi_{b_1 b_2}$ strukturerhaltend ist, so auch π_b.

Satz 3 *Silver Machines erfüllen die Direct Limit Property.*

Beweis Zunächst bemerke, daß jedes π_b nach Definition des gerichteten Limes ordnungserhaltend ist. Sei $X_b = \operatorname{range}(\pi_b)$ und erweitere π_b durch $\pi_b(\gamma_b) = \operatorname{lub} X_b$. Wir zeigen $M^{\operatorname{lub} X_b}[X_b] \subset X_b$.

Für alle $b \in B$ zeigen wir per simultaner Induktion über $\alpha \leq \gamma$, daß, wenn wir für ein $\alpha_b \leq \gamma_b$ haben, daß $\pi_b(\alpha_b) = \alpha$, dann $\pi_b \upharpoonright \alpha_b \colon \alpha_b \cong \alpha$, d.h., $M^\alpha[X_b \cap \alpha] \subset X_b \cap \alpha$.

Für $\alpha = 0$ ist dies klar. Für beliebige $i < \omega$ und $u \in {}^{<\omega}\alpha_b$, s.d. $\beta := M_i^\alpha(\pi_b(u))\downarrow$, haben wir zu zeigen, daß $\beta \in X_b \cap \alpha$. Sei $\mu = \max(\pi_b(u)) \cup \beta < \alpha$ und wähle $b' \geq b$, s.d. $\beta = \pi_{b'}(\beta')$ für ein $\beta' < \gamma_{b'}$ und $H_\mu \subset X_{b'}$. (Dies ist möglich, weil für jedes $\delta \in \gamma$ ein $c \in B$ existiert, s.d. $\delta \in \operatorname{range}(\pi_c)$ und somit $\delta \in \operatorname{range}(\pi_{c'})$ für jedes $c' \geq c$, und weil H_μ endlich ist.) Nun seien $u' = \pi_{bb'}(u)$ (also $\pi_{b'}(u') = \pi_b(u)$) und $\mu' = \pi_{b'}^{-1}(\mu) \leq \mu < \alpha$. Nach der Induktionsannahme und FSP ist $\pi_{b'} \upharpoonright (\mu' + 1) : (\mu' + 1) \cong (\mu + 1)$. Es folgt, daß $M_i^{\mu'+1}(u') = \beta'$.

Weil $\beta < \alpha \leq \operatorname{lub} X_b$, haben wir $\beta \leq \xi$ für ein $\xi \in X_b$ (sonst wäre $\beta \geq \operatorname{lub} X_b$). Sei $\xi_b < \gamma_b$, s.d. $\pi_b(\xi_b) = \xi$ und $\xi_{b'} = \pi_{bb'}(\xi_b)$. Daher $\pi_{b'}(\xi_{b'}) = \xi$ und schließlich $\beta' \leq \xi_{b'} \in \operatorname{range} \pi_{bb'}$. Somit $\mu' < \operatorname{lub}(\operatorname{range} \pi_{bb'})$. Nun ist $\pi_{bb'} \colon \gamma_b \cong \operatorname{lub}(\operatorname{range} \pi_{bb'})$, und wir können schließen, daß $\pi_{bb'}(\bar\beta) = \beta'$ für ein $\bar\beta < \alpha_b$. Dann $\beta = \pi_{b'} \circ \pi_{bb'}(\bar\beta) = \pi_b(\bar\beta) \in X_b \cap \alpha$ wie gesucht. $\dashv$

2 Die KRS-Machine

In diesem Kapitel konstruieren wir eine Silver Machine, die für L und den Beweis der Covering Lemmas geeignet ist.

Als erstes müssen wir unsere Sprache definieren.

Definition 9 (Sprache, Terme, Formeln) $\mathcal{L}$ bestehe aus den folgenden *Symbolen*: $\in, =, \vee, \neg, (,)$; Variablen v_i für alle $i \in \omega$; Quantoren $\exists_\alpha$ und S_α für all $\alpha \in \mathrm{On}$.

Im folgenden werden *Terme* und *Formeln* induktiv definiert:

i) Wenn s und t Variablen oder Terme sind, dann sind $(s = t)$ und $(s \in t)$ Formeln. Wir schließen den Fall aus, daß s oder t eine Variable ist, die als gebundene Variable in t respektive s auftritt.

ii) Wenn φ und ψ Formeln sind, dann sind $(\varphi \vee \psi)$, $(\neg\, \varphi)$ und $(\exists_\alpha v_i)\, \varphi$ Formeln. Für den $\vee$-Fall erlauben wir nicht, daß eine Variable, die frei in φ vorkommt, in ψ gebunden ist oder umgekehrt. Für den $\exists_\alpha$-Fall darf v_i nicht gebunden in φ sein.

iii) Wenn φ eine Formel, v_i die einzige freie Variable in φ und weder $\exists_\beta$ für ein $\beta > \alpha$ noch S_β für ein $\beta \geq \alpha$ ein Symbol in φ ist (d.h., φ hat Rang $\leq \alpha$, s.u.), dann ist $(S_\alpha v_i)\, \varphi\, (v_i)$ ein Term.

Per definitionem haben Terme keine freien Variablen. Weiterhin kann eine Variable, die innerhalb einer Formel gebunden auftritt, nicht frei in derselben Formel sein; dies wird gemacht, damit freie Variablen einfach substituiert werden können. Die logischen Symbole, die oben nicht spezifiziert sind (wie $\forall_\alpha$, $\leftrightarrow$, ...), werden auf die offensichtliche Art und Weise definiert.

Definition 10 (Rang) Für einen Term oder eine Formel φ sei der *Rang* von φ, $\mathrm{rk}(\varphi)$, das kleinste α, s.d.,

i) wenn $\exists_\beta$ in φ auftritt, dann $\beta \leq \alpha$ ist und,

ii) wenn S_β in φ auftritt, dann $\beta < \alpha$ ist.

Die Idee hinter diesen Definitionen ist, daß L_α aus den Interpretationen der Terme vom Rang $\leq \alpha$ besteht und daß $(\exists_\alpha v_i)\,\varphi$ für $\exists v_i \in L_\alpha\ \varphi$ steht. Eine geeignete Zuordnung wird später in diesem Kapitel eingeführt. Als nächsten Schritt benötigen wir einige Werkzeuge, um unsere Sprache zu kodieren („Gödel-Numerierung").

Definition 11 (Paarungsfunktion) Eine *Paarungsfunktion* ist eine Bijektion $P\colon {}^{<\omega}\mathrm{On} \to \mathrm{On}$, s.d. $\forall u \in {}^{<\omega}\mathrm{On}\ P(u) \geq \max(u)$. Für $u, v \in {}^{<\omega}\mathrm{On}$ sei $u <_P v$ gdw. $P(u) < P(v)$. Definiere „inverse Funktionen" $P_k\colon \mathrm{On} \rightharpoonup \mathrm{On}$, $k \in \omega$, durch

$$P_k(\delta) = \begin{cases} \alpha_k, & \text{wenn } P^{-1}(\delta) = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle \text{ und } k < n \\ \uparrow\ , & \text{sonst} \end{cases}.$$

Von nun an fixieren wir die folgende Paarungsfunktion P:
Für $u \in {}^{<\omega}\mathrm{On}$ und $\alpha \in \mathrm{On}$ sei $\mathrm{occ}\,(\alpha, u) =$ die Anzahl der αs in u. Setze $u <_P v$ gdw.

i) $\mathrm{occ}\,(\alpha, u) < \mathrm{occ}\,(\alpha, v)$, wobei α die größte Ordinalzahl mit $\mathrm{occ}\,(\alpha, u) \neq \mathrm{occ}\,(\alpha, v)$ ist, oder

ii) $\forall \alpha\ \ \mathrm{occ}\,(\alpha, u) = \mathrm{occ}\,(\alpha, v)$ und $u <_{lex} v$.

Offensichtlich ist $<_P$ eine (strikte) lineare Ordnung. Beachte, daß $<_P$ auch wohlfundiert ist: Angenommen $\langle u_i \rangle_{i<\omega}$ ist eine $<_P$-absteigende Folge von Elementen aus ${}^{<\omega}\mathrm{On}$. Da es für jedes u_i nur endlich viele $u \in {}^{<\omega}\mathrm{On}$ gibt, s.d. $\forall \alpha\ \ \mathrm{occ}\,(\alpha, u_i) = \mathrm{occ}\,(\alpha, u)$, können wir annehmen, daß alle u_i durch Bedingung i) geordnet sind. Dann sei $\alpha_i = \max\,(u_i)$ für alle $i < \omega$; $\langle \alpha_i \rangle$ ist (nicht notwendig streng) monoton fallend und hat daher ein Minimum, sagen wir α. Jetzt betrachte die Teilfolge von $\langle u_i \rangle_{i<\omega}$ mit $\max\,(u_i) = \alpha$; von diesen nehmen wir alle mit minimalem $\mathrm{occ}\,(\alpha, u_i)$. Alle Elemente dieser Teilfolge

müssen nach Konstruktion kleiner sein als der Rest. α ignorierend können wir die Suche nach dem minimalen Maximum wiederholen und so weiter. Da diese Maxima eine streng monoton fallende Folge von Ordinalzahlen bilden, endet dieser Prozeß nach endlich vielen Schritten mit dem gewünschten Ergebnis. Daher definiert $P(u) = \mathrm{otp}_{<_P}(u)$ eine Bijektion $P\colon {}^{<\omega}\mathrm{On} \to \mathrm{On}$.

Es bleibt zu zeigen, daß $\forall u \in {}^{<\omega}\mathrm{On}\ P(u) \geq \max(u)$. Angenommen nicht; dann wähle das $<_P$-minimale u mit $\alpha := P(u) < \beta := \max(u)$. Also $u = \langle\beta\rangle$. Aber $P(u) > P(\langle\alpha\rangle) \geq \alpha$, Widerspruch. Daher ist P, wie verlangt, eine Paarungsfunktion.

Definition 12 (*P*-abgeschlossen) Eine Ordinalzahl δ ist *P-abgeschlossen* gdw. $\forall u \in {}^{<\omega}\delta\ P(u) < \delta$.

Definition 13 (Kodierung) Die Symbole von $\mathcal{L}$ werden wie folgt mit Ordinalzahlen identifiziert:

Symbol	$\in$	$=$	$\vee$	$\neg$	(	)	v_i	$\exists_\alpha$	S_α
Ordinalzahl	0	1	2	3	4	5	$i+6$	$P(\langle 1,\alpha\rangle)$	$P(\langle 0,1,\alpha\rangle)$

Damit kann jeder Term oder jede Formel φ als Folge s von Ordinalzahlen gesehen werden. Sei $\ulcorner\varphi\urcorner = P(s)$. In diesem Kontext identifizieren wir jede Ordinalzahl σ mit der Folge $\langle\sigma\rangle$, so daß $\ulcorner\sigma\urcorner = \ulcorner\langle\sigma\rangle\urcorner$.

Das folgende ist eine unmittelbare Konsequenz aus der Definition:

Proposition 2

i) Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ mit $\alpha < \beta$: $\omega < \exists_\alpha < S_\alpha < \exists_\beta$

ii) Wenn φ eine Formel oder ein Term ist und σ ein Symbol, das in φ auftritt, dann $\ulcorner\sigma\urcorner < \ulcorner\varphi\urcorner$.

iii) Wenn φ eine Formel oder ein Term vom Rang α ist und β die kleinste P-abgeschlossene Ordinalzahl größer als α ist, dann $\alpha < \ulcorner\varphi\urcorner < \beta$.

iv) Wenn φ und ψ Formeln sind, wobei φ eine echte Teilformel von ψ ist, dann $\ulcorner\varphi\urcorner < \ulcorner\psi\urcorner$.

v) *Wenn t ein Term und φ eine Formel ist, die t enthält, dann $\ulcorner t \urcorner < \ulcorner \varphi \urcorner$.*

vi) *Wenn s und t Terme mit $\mathrm{rk}(s) < \mathrm{rk}(t)$ sind, dann $\ulcorner s \urcorner < \ulcorner t \urcorner$.*

vii) *Wenn t ein Term vom Rang $\leq \alpha$ ist und $\varphi(v_i)$ eine Formel, dann $\ulcorner t \urcorner < \ulcorner (\exists_\alpha v_i)\, \varphi\,(v_i) \urcorner$ und $\ulcorner \varphi[t] \urcorner < \ulcorner (\exists_\alpha v_i)\, \varphi\,(v_i) \urcorner$.*

viii) *Wenn X für ein $\delta \in \mathrm{On}$ M^δ-abgeschlossen ist, wobei die Paarungsfunktion P eine Funktion von M ist, und $\pi\colon M^{\bar{\delta}} \cong X$, dann gilt: Es gibt einen Term / eine Formel φ mit $\ulcorner \varphi \urcorner \in \bar{\delta}$ gdw. es einen Term / eine Formel ψ mit $\ulcorner \psi \urcorner \in X$ gibt. (Tatsächlich ergibt sich ψ durch Ersetzung von $\exists_\alpha$ durch $\exists_{\pi(\alpha)}$ und von S_α durch $S_{\pi(\alpha)}$.)* $\dashv$

Beispielsweise berücksichtige für viii), daß $\pi \restriction \left(\bar{\delta} \cap \omega\right) = \mathrm{id}$. Dies ist klar, da X M^δ-abgeschlossen ist und P angewandt auf die Folge von n Nullen gleich n ist, folglich $\delta \cap \omega \subset X$.

Die nächste Definition wird die Situation in L simulieren. Am Ende dieses Kapitels wird die Maschine dann auf L abgebildet.

Definition 14 (Wahrheitsfunktion und Skolemfunktion) Wir definieren eine *Wahrheitsfunktion* $T\colon \{\ulcorner \varphi \urcorner | \varphi \text{ Satz}\} \to 2$ per Induktion über den Rang. Angenommen, dies ist bereits für alle $\beta < \alpha$ geschehen und φ ist ein Satz vom Rang α. Dann wird $T(\varphi)$ per Induktion über die Komplexität von φ wie folgt definiert:

i) Für Terme $s = (S_\beta v_i)\, \psi\,(v_i)$ und $t = (S_\gamma v_j)\, \chi\,(\psi_j)$ (seien k, m und n — alle verschieden — minimal, s.d. v_k, v_m und v_n nicht in ψ und χ vorkommen):

$$T\left(\ulcorner s = t \urcorner\right) = \begin{cases} T\left(\ulcorner (\forall_\beta v_k)\left(\psi\,(v_k) \leftrightarrow \chi\,(v_k)\right) \urcorner\right) & , \beta = \gamma \\ T\left(\ulcorner (\forall_\gamma v_k)\left(\psi\,(v_k) \leftrightarrow \chi\,(v_k) \wedge v_k \in l_\beta\right) \urcorner\right), & \beta < \gamma \\ T\left(\ulcorner (\forall_\beta v_k)\left(\psi\,(v_k) \wedge v_k \in l_\gamma \leftrightarrow \chi\,(v_k)\right) \urcorner\right), & \beta > \gamma \end{cases} \text{ und}$$

$$T\left(\ulcorner s \in t \urcorner\right) =$$
$$= \begin{cases} T\left(\ulcorner (\exists_\gamma v_k)\left(\chi\,(v_k) \wedge (\forall_\beta v_m)\left(v_m \in v_k \leftrightarrow \psi\,(v_m)\right)\right) \urcorner\right) & , \beta \geq \gamma \\ T\left(\ulcorner (\exists_\gamma v_k)\left(\chi\,(v_k) \wedge (\forall_\gamma v_m)\left(v_m \in v_k \leftrightarrow \psi\,(v_m) \wedge v_m \in l_\beta\right)\right) \urcorner\right), & \beta < \gamma \end{cases},$$

wobei l_β der Term $(S_\beta v_n)\,(v_n = v_n)$ ist.

ii) Logische Operatoren:

$T\left(\ulcorner\neg\,\psi\urcorner\right) = 1 \setminus T\left(\ulcorner\psi\urcorner\right)$

$T\left(\ulcorner\psi_1 \vee \psi_2\urcorner\right) = T\left(\ulcorner\psi_1\urcorner\right) \cup T\left(\ulcorner\psi_2\urcorner\right)$

iii) Quantor $(\beta \leq \alpha)$:

$T\left(\ulcorner(\exists_\beta v_i)\,\psi\,(v_i)\urcorner\right) = \bigcup\{\,T\left(\ulcorner\psi[t]\urcorner\right) |\, t \text{ Term} \wedge \mathrm{rk}(t) \leq \beta\}$

Wir sagen, daß φ wahr ist gdw. $T\left(\ulcorner\varphi\urcorner\right) = 1$.

Schließlich definieren wir eine *Skolemfunktion*

$$h\colon\ \{\ulcorner\varphi\urcorner\,|T\left(\ulcorner\varphi\urcorner\right) = 1 \wedge \varphi = (\exists_\alpha v_i)\,\psi\,(v_i)\ \text{ für geeignete } \alpha, i, \psi\,\} \to \mathrm{On},$$

s.d., wenn $\ulcorner\varphi\urcorner \in \operatorname{dom} h$, dann $\psi[t]$ wahr ist, wobei t minimal mit dieser Eigenschaft ist und $\ulcorner t\urcorner = h\left(\ulcorner\varphi\urcorner\right)$.

Damit haben die Voraussetzungen, die gewünschte Maschine zu definieren und zu zeigen, daß es sich tatsächlich um eine Silver Machine handelt.

Definition 15 (KRS-Machine) Wir definieren die *KRS-Machine* (*Koepke-Richardson-Silver-Machine*) zu $M = (\mathrm{On}, <, P, P_k, T, h)_{k<\omega}$.

Satz 4 *Die KRS-Machine ist eine Silver Machine.*

Beweis Wir zeigen, daß $H_\delta = (\{\,P_k(\delta)|\,k < \omega\} \cup \{h(\delta)\}) \cap \delta$ wie gesucht ist. Offensichtlich ist H_δ endlich und $H_\delta \subset M^{\delta+1}\left[\{\delta\}\right]$. Angenommen, X ist M^δ-abgeschlossen mit $H_\delta \subset X$ und $M^{\bar\delta} \cong X$. Wir haben zu zeigen, daß $X \cup \{\delta\}$ $M^{\delta+1}$-abgeschlossen mit $M^{\bar\delta+1} \cong (X \cup \{\delta\})$ ist. Das heißt für $\pi\colon \left(\bar\delta + 1\right) \xleftrightarrow{\text{o.p.}} (X \cup \{\delta\})$:

i) $\pi\left(P^{\bar\delta+1}\left(P^{-1}\left(\bar\delta\right)\right)\right) \simeq P^{\delta+1}\left(\pi\left(P^{-1}\left(\bar\delta\right)\right)\right)$

ii) $\forall k < \omega\ \pi\left(P_k\left(\bar\delta\right)\right) \simeq P_k\left(\delta\right)$

iii) $T\left(\bar\delta\right) \simeq T(\delta)$

iv) $\pi\left(h\left(\bar{\delta}\right)\right) \simeq h(\delta)$

Das ist hinreichend, da dies alle neuen Fälle in dieser Stufe sind. Für iii) erinnere, daß $\pi\restriction\left(\bar{\delta} \cap 2\right) = \mathrm{id}$.

Beachte zwei einfache Fakta:

Faktum 1: Wenn δ P-abgeschlossen ist, dann $P\left(\langle\delta\rangle\right) = \delta$.

Faktum 2: Wenn $\delta = \max\left(P^{-1}(\delta)\right)$, dann ist δ P-abgeschlossen.

Für i) und ii) reicht es zu zeigen, daß $\pi\left(P^{-1}\left(\bar{\delta}\right)\right) = P^{-1}(\delta)$.

Fall 1: δ ist P-abgeschlossen. Dann ist $\bar{\delta}$ P-abgeschlossen. (Für $u \in {}^{<\omega}\bar{\delta}$ haben wir $P\left(\pi(u)\right) < \delta$, somit $P^{\delta}\left(\pi(u)\right)\downarrow$. Daher $P^{\bar{\delta}}(u)\downarrow$ mit $P(u) < \bar{\delta}$.) Mit Faktum 1 sind wir fertig.

Fall 2: δ ist nicht P-abgeschlossen. Mit Faktum 2 haben wir $P^{-1}(\delta) \in {}^{<\omega}\delta$. Weil $H_{\delta} \subset X$, gibt es ein $u \in {}^{<\omega}\bar{\delta}$ mit $\pi(u) = P^{-1}(\delta)$. Sei $P(u) = \bar{\eta}$. Dann $\bar{\delta} \leq \bar{\eta}$, da sonst $\delta > \pi\left(\bar{\eta}\right) = \pi\left(P^{\bar{\delta}}(u)\right) = P^{\delta}\left(\pi(u)\right)\uparrow$. Daher ist $\bar{\delta}$ nicht P-abgeschlossen, und so ergibt sich, erneut mit Faktum 2, $P^{-1}\left(\bar{\delta}\right) \in {}^{<\omega}\bar{\delta}$. Wenn $\bar{\delta} < \bar{\eta}$, dann $\pi\left(P^{-1}\left(\bar{\delta}\right)\right) <_P \pi(u) = P^{-1}(\delta)$. Damit $P^{\delta}\left(\pi\left(P^{-1}\left(\bar{\delta}\right)\right)\right)\downarrow$, aber $P^{\bar{\delta}}\left(P^{-1}\left(\bar{\delta}\right)\right)\uparrow$, was der Annahme $\bar{\delta} < \bar{\eta}$ widerspricht. Somit $\bar{\delta} = \bar{\eta}$ und $\pi\left(P^{-1}\left(\bar{\delta}\right)\right) = P(u) = P^{-1}(\delta)$.

Für iii) und iv) erinnere, daß π, nach viii) von Proposition 2, syntaktische Ausdrücke erhält. Somit ist $\bar{\delta}$ ein Satz gdw. δ einer ist. Wenn nicht, ist das Ergebnis trivial. Sei also $\bar{\delta}$ ein Satz.

Fall 1: $\bar{\delta}$ ist von einer der folgenden Formen: $s = t$, $s \in t$, $\neg\, \psi$ oder $\psi \vee \chi$ (gewisse Terme s, t und Formeln ψ, χ) Dann ist iii) gemäß Definition von T klar. Und in iv) sind beide Seiten nicht definiert.

Fall 2: $\bar{\delta}$ ist von der Form $\left(\exists_{\alpha} v_i\right)\psi\left(v_i\right)$. Dann ist δ von der Form $\left(\exists_{\pi(\alpha)} v_i\right)\pi\left(\psi\left(v_i\right)\right)$. Wenn $\bar{\delta}$ wahr ist, dann $T\left(\psi[t]\right) = 1$ für $\ulcorner t \urcorner = h\left(\bar{\delta}\right)$. Somit $T\left(\pi(\psi)\left[\pi(t)\right]\right) = T(\delta) = 1$ und $\pi\left(h\left(\bar{\delta}\right)\right) \geq h(\delta)$. Andererseits nimm an, daß δ wahr ist. Dann $h(\delta) \in H_{\delta} \subset X$. Somit gibt es einen Term t mit

$\ulcorner t \urcorner \in \bar{\delta}$ und $\pi\left(\ulcorner t \urcorner\right) = h(\delta)$. Nun $T\left(\pi(\psi)\left[\pi(t)\right]\right) = T\left(\psi\left[t\right]\right) = T\left(\bar{\delta}\right) = 1$ und $\pi\left(h\left(\bar{\delta}\right)\right) \leq h\left(\delta\right)$.

Es folgt, daß $T\left(\bar{\delta}\right) = T(\delta)$ und $\pi\left(h\left(\bar{\delta}\right)\right) = h(\delta)$. $\dashv$

Die folgende Definition stellt schließlich die Verbindung zwischen der KRS-Machine und L durch Zuordnung jedes Terms von $\mathcal{L}$, d.h., der entsprechenden Ordinalzahl, zu einem Element von L her.

Definition 16 (Interpretation) Definere $A\colon \{\ulcorner t \urcorner \,|t \text{ Term}\} \to L$ durch Induktion über den Rang. Beachte, daß es keine Terme vom Rang 0 oder von Limesrang gibt. Angenommen, die Definition ist bereits für alle $\beta \leq \alpha$ gegeben und t ist ein Term vom Rang $\alpha + 1$, sagen wir $t = \left(S_\alpha v_i\right)\varphi\left(v_i\right)$. Somit hat φ Rang $\leq \alpha$. Sei $\varphi'\left(v_i, v_{k_0}, \dots, v_{k_{n-1}}\right)$ eine Formel vom Rang $\leq \alpha$, die keine Terme enthält, und seien t_j Terme mit $\mathrm{rk}\left(t_j\right) < \alpha < \mathrm{rk}(t)$, $j < n$, s.d. $\varphi\left(v_i\right) = \varphi'\left[v_i, t_0, \dots, t_{n-1}\right]$. Somit wurde $A\left(t_j\right)$ bereits definiert. Nun setze

$$A(t) = \left\{x \in L_\alpha \,\middle|\, L_\alpha \models \varphi'\left[x, A\left(t_0\right), \dots, A\left(t_{n-1}\right)\right]\right\}.$$

Proposition 3 $L_\alpha = \{A(t)\,|t$ *ist ein Term vom Rang* $\leq \alpha\}$

Beweis Dies ist klar für $\alpha = 0$ und $\lim \alpha$. Sei also $\alpha = \beta + 1$: Angenommen $x = \{y \in L_\beta \,|L_\beta \models \psi\left[y, t_0, \dots, t_{n-1}\right]\} \in L_\alpha$, wobei $\psi\left(v_i, v_{k_0}, \dots, v_{k_{n-1}}\right)$ eine Formel der Mengenlehre ist (O.B.d.A. trete keine Variable frei und gebunden auf.) und $t_j \in L_\beta$, $j < n$. Sei φ die Formel von $\mathcal{L}$, die sich aus ψ durch Ersetzung jedes Auftretens von $\exists$ durch $\exists_\beta$ ergibt, und seien s_j, $j < n$, gemäß der Induktionsannahme Terme vom Rang $\leq \beta$, s.d. $A\left(s_j\right) = t_j$. Nun ist $s = \left(S_\beta v_i\right)\varphi\left(v_i, s_0, \dots, s_{n-1}\right)$ ein Term vom Rang $\beta + 1$, s.d. $A(s) = x$.

Umgekehrt sei t ein Term vom Rang $\leq \alpha$. Es bleibt der Fall, daß $t = \left(S_\beta v_i\right)\varphi\left(v_i\right)$ tatsächlich ein Term vom Rang α ist. Seien φ' und t_j, $j < n$, wie in der Definition. Da $\mathrm{rk}\left(t_j\right) < \beta$, ist $A\left(t_j\right) \in L_\beta$, $j < n$. Daher ist $A(t)$ definierbar über L_β. Somit $A(t) \in L_\alpha$. $\dashv$

Korollar 1 *Sei t ein Term vom Rang α. Dann ist $A(t) \in L_\alpha$. Weiterhin ist $A(l_\alpha) = L_\alpha$, wobei $l_\alpha = (S_\alpha v_0)(v_0 = v_0)$. Also sind die Wahrheitsfunktion und die Skolemfunktion wie erwartet:*

Sei $\varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ eine Formel der Mengenlehre und $\alpha \in \mathrm{On}$. Wenn φ_α die Formel aus $\mathcal{L}$ ist, die sich aus φ durch Ersetzung aller $\exists$ durch $\exists_\alpha$ ergibt, und, wenn t_j, $j < n$, Terme vom Rang $< \alpha$ sind, dann

$$T(\varphi_\alpha[t_0, \dots, t_{n-1}]) = 1 \text{ gdw. } L_\alpha \models \varphi[A(t_0), \dots, A(t_{n-1})]. \qquad \dashv$$

Definition 17 Eine Maschine M heißt ZF^-*-absolut* gdw. die Relation $M_i^\delta(u) \simeq \alpha$ $\Delta_1^{ZF^-}$ mit Parametern u, δ, i und α ist.

Satz 5 *Die KRS-Machine ist ZF^--absolut.*

Beweis Natürlich kommt es nicht auf die Numerierung der Funktionen an. Für die Bestimmtheit sei $M_0 = P$, $M_1 = T$, $M_2 = h$ und $M_{i+3} = P_i$ für alle $i < \omega$.

Um zu sehen, daß $P^\delta(u) \simeq \alpha$ $\Delta_1^{ZF^-}$ ist, zeigen wir zunächst, daß $u <_P^\delta v$ $\Delta_0^{ZF^-}$ mit Parametern u, v, δ ist, wobei $<_P^\delta$ für $<_P \cap ({}^{<\omega}\delta)^2$ steht:

$$\begin{aligned} &\exists \beta \in \delta\, (R(u, v, \beta) \wedge \forall \gamma \in \delta\, (\beta \in \gamma \to R(u, v, \beta) \wedge R(v, u, \beta)) \\ &\wedge \neg\, R(v, u, \beta)) \vee (\forall \beta \in \delta\, (R(u, v, \beta) \wedge R(v, u, \beta)) \wedge u <_{lex} v), \end{aligned}$$

wobei $R(u, v, \beta)$ für $\mathrm{occ}(u, \beta) \leq \mathrm{occ}(v, \beta)$ steht:

$$\exists f \in \mathcal{P}(\{i \in \mathrm{dom}\, v \,|\, v(i) = \beta\} \times \{i \in \mathrm{dom}\, u \,|\, u(i) = \beta\})\, f \text{ injektiv}$$

Beachte, wie wichtig es ist, daß u und v endliche Folgen sind. Nun, da ${}^{<\omega}\delta$ ein $\Delta_1^{ZF^-}$-Term ist, ergibt sich $P^\delta(u) \simeq \alpha$ wie gewünscht:

$$\exists f \left(f : \left\{v \in {}^{<\omega}\delta \,\middle|\, v <_P u\right\} \leftrightarrow \alpha \wedge \forall v, w \in {}^{<\omega}\delta\, (v <_P w \to f(v) < f(w))\right)$$

oder

$$\begin{aligned} &\forall f \left(\left(f : \left\{v \in {}^{<\omega}\delta \,\middle|\, v <_P u\right\} \to \delta \wedge \forall v, w \in {}^{<\omega}\delta\, (v <_P w \to f(v) < f(w)) \right.\right. \\ &\left.\wedge\ \mathrm{On}\,(\mathrm{range}\, f)) \to \mathrm{range}\, f = \alpha\right) \end{aligned}$$

Daher folgt, daß jedes $P_i^\delta(u) \simeq \alpha$ $\Delta_1^{ZF^-}$ ist. T ist wegen seiner rekursiven Definition, in voller Länge hingeschrieben, klar. Schließlich $h^\delta(\beta) \simeq \alpha$ (wir schreiben β für die Folge u der Länge 1):

$$\begin{aligned}
&T(\beta) = 1 \wedge \exists\gamma \in \delta\, \exists i \in \omega\, \exists u \in {}^{<\omega}\delta \left(\beta = P\left(\langle 4, P\left(\langle 1, \gamma\rangle\right), i{+}6, 5\rangle^\frown u\right)\right.\\
&\wedge\ T\left(\ulcorner f\left(u, i, \alpha\right)\urcorner\right) = 1 \wedge \forall\zeta < \alpha \left(\mathrm{term}\left(\zeta\right) \to T\left(\ulcorner f\left(u, i, \zeta\right)\urcorner\right) = 0\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{term}\,(\zeta)$ offenbar beschränkt ist (ähnlich zu dem Teil oben, bei dem β aufgeschlüsselt wird) und $f\,(u, i, \zeta) = \psi\,[t]$, wobei $\zeta = \ulcorner t\urcorner$ und u $\psi\,(v_i)$ repräsentiert. $f\,(u, i, \zeta) = v$ kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
&\exists s\colon\ \mathrm{dom}\, v \to (\mathrm{dom}\, u + 1)\, (v(0) = u(0) \wedge s(0) = 0\\
&\wedge\ \forall j < \mathrm{dom}\, v\, (j{+}1 < \mathrm{dom}\, v\ \wedge\ s(j) + 1 < \mathrm{dom}\, u \to\\
&(u\,(s(j) + 1) \neq i{+}6 \to v\,(j{+}1) = u\,(s(j) + 1) \wedge s\,(j{+}1) = s(j) + 1)\\
&\wedge\, (u\,(s(j) + 1) = i{+}6 \to s\,(j + \mathrm{dom}\, k) = s(j) + 1 \wedge \forall k < \mathrm{dom}\, t\\
&(v\,(j{+}1{+}k) = t(k) \wedge (k{+}1 < \mathrm{dom}\, t \to s\,(j{+}1{+}k) = \mathrm{dom}\, u)))))\,.
\end{aligned}$$

Die Idee dieser Formel ist es, die Variable v_i in ψ durch den Term t zu ersetzen, wobei s ein Zähler ist. Beachte, daß das erste $\exists$ durch $\forall$ ersetzt werden kann, da der Rest der Formel s eindeutig festlegt; daher ist dies eine $\Delta_1^{ZF^-}$-Formel, was zu zeigen war. $\dashv$

3 Covering

In diesem Abschnitt seien M die KRS-Machine und A die Interpretationsfunktion aus Definition 16.

Bermerkung 2 *$0^\sharp$ existiert gdw. es eine nicht triviale Einbettung von L nach L gibt. Weiterhin, wenn α, β Limesordinalzahlen sind und $\pi \colon L_\alpha \to L_\beta$ eine elementare Einbettung mit $\pi(\gamma) \neq \gamma$ für ein $\gamma < \overline{\overline{\alpha}}$ ist, dann existiert $0^\sharp$. (Vgl. Satz V.4.3 in [1])*

Covering Lemma

Dieser Beweis des Covering Lemmas geht im wesentlichen auf Silver und Richardson zurück.

Satz 6 (Jensens Covering Lemma) *Angenommen $0^\sharp$ existiert nicht, und X sei eine überabzählbare Ordinalzahlmenge. Dann gibt es ein $Y \in L$, s.d. $X \subset Y$ und $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$.*

Beweis Angenommen, ein derartiges Y existiert nicht. Wir zeigen, daß $0^\sharp$ existiert.

Sei $\upsilon \in \mathrm{On}$ minimal, s.d. für ein überabzählbares $X \subset \upsilon$ kein $Y \in L$ mit $X \subset Y$ und $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ existiert. Fixiere ein solches X. Aus der Minimalität von υ läßt sich folgendes leicht ableiten:

i) X ist konfinal in υ.

ii) $\aleph_0 < \overline{\overline{X}} < \overline{\overline{\upsilon}}$

iii) $L \models$ „υ ist eine Kardinalzahl"
Angenommen nicht, und es seien $\mu = \overline{\overline{\upsilon}}^L$ und $f \colon \mu \leftrightarrow \upsilon$, wobei $f \in L$. Da $\bar{X} := f^{-1}[X] \subset \mu < \upsilon$, gibt es ein $\bar{Y} \in L$, s.d. $\bar{X} \subset \bar{Y} \subset \mu$ und $\overline{\overline{\bar{X}}} = \overline{\overline{\bar{Y}}}$. Daher $Y := f\left[\bar{Y}\right] \in L$ mit $X \subset Y \subset \upsilon$ und $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$.

iv) $\neg\,\exists Y \in L \left(X \subset Y \wedge L \models \overline{\overline{Y}} < \upsilon\right)$

Angenommen $Y \in L$ mit $X \subset Y$ und $\mu := \overline{\overline{Y}}^{L} < \upsilon$. Sei $f : \mu \leftrightarrow Y$, wobei $f \in L$. Da $\bar{X} := f^{-1}[X] \subset \mu < \upsilon$, gibt es ein $\bar{Z} \in L$, s.d. $\bar{X} \subset \bar{Z} \subset \mu$ und $\overline{\overline{\bar{X}}} = \overline{\overline{\bar{Z}}}$. Wiederum widerspricht $f\left[\bar{Z}\right]$ der Annahme.

Die folgende Konstruktion ist der Hauptteil des Beweises.

Sei $\pi : L_{\bar{\upsilon}} \to L_{\upsilon}$ elementar für ein $\bar{\upsilon}$. Beachte, daß L_{υ} ein Limes von ZF^{-}-Modellen ist, da υ eine Kardinalzahl in L ist. Für $\eta \geq \bar{\upsilon}$ definieren wir die gerichtete partielle Ordnung $\langle B_\eta, \leq\rangle$:

$$B_\eta = \left\{\langle \delta, F, \beta\rangle \,\middle|\, \beta \leq \delta < \eta \wedge F \subset \delta \wedge \overline{\overline{F}} < \aleph_0 \wedge \beta < \bar{\upsilon}\right\}$$

Für $b \in B_\eta$ schreiben wir $b = \langle \delta_b, F_b, \beta_b\rangle$. Für $b, b' \in B_\eta$: $b \leq b'$ gdw. $\delta_b \leq \delta_{b'}$, $\beta_b \leq \beta_{b'}$ und $F_b \subset M^{\delta_{b'}}\left[F_{b'} \cup \beta_{b'}\right]$. Bemerke, daß $M^{\delta_b}\left[F_b \cup \beta_b\right] \subset M^{\delta_{b'}}\left[F_{b'} \cup \beta_{b'}\right]$ (d.h., $\gamma_b \leq \gamma_{b'}$, s.u.), falls $b \leq b'$.

Nun definiere f_b und γ_b durch $f_b : \gamma_b \cong M^{\delta_b}\left[F_b \cup \beta_b\right]$. Nach Bemerkung 1 haben wir $\gamma_b = M^{\gamma_b}\left[f_b^{-1}\left(F_b\right) \cup \beta_b\right]$. Weiterhin definiere $f_{bb'} : \gamma_b \to \gamma_{b'}$ ($b \leq b'$) durch $f_{bb'} = f_{b'}^{-1} \circ f_b$. Dann ist $f_{bb'}$ strukturerhaltend. Das folgende Diagramm möge die Situation verdeutlichen:

$$\begin{array}{ccc} M_b^{\delta}\left[F_b \cup \beta_b\right] & \hookrightarrow & M_{b'}^{\delta'}\left[F_{b'} \cup \beta_{b'}\right] \\ \uparrow f_b & & \uparrow f_{b'} \\ \gamma_b & \xrightarrow{f_{bb'}} & \gamma_{b'} \end{array}$$

Beachte, daß $f_{bb'}$ die eindeutig bestimmte Funktion $f : \gamma_b \to \gamma_{b'}$ ist, die strukturerhaltend mit $f \restriction \beta_b = \mathrm{id} \restriction \beta_b$ und $f\left(f_b^{-1}\left(F_b\right)\right) = f_{b'}^{-1}\left(F_b\right)$ ist. Da M ZF^{-}-absolut ist und $L_{\bar{\upsilon}}$ ein Limes von ZF^{-}-Modellen, erhalten wir, daß $f_{bb'} \in L_{\bar{\upsilon}}$, falls $\gamma_b, \gamma_{b'} < \bar{\upsilon}$, wobei $b \leq b'$. Jetzt definiere das gerichtete System Z_η als $\langle \gamma_b, \in\rangle_{b \in B_\eta}, \langle f_{bb'}\rangle_{b \leq b'}$. Es folgt, daß $\pi\left(Z_\eta\right) = \langle \pi\left(\gamma_b\right), \in\rangle_{b \in B_\eta}, \langle \pi\left(f_{bb'}\right)\rangle_{b \leq b'}$ existiert gdw. $\forall b \in B_\eta\ \gamma_b < \bar{\upsilon}$.

Von nun an sei angenommen, daß η eine Limesordinalzahl ist, s.d. $\pi\left(Z_\eta\right)$ existiert und wohlfundiert ist. Sei $\langle \eta^*, \in, f_b^*\rangle$ der gerichtete Limes von $\pi\left(Z_\eta\right)$.

Für $b \leq b'$ ist $\pi\left(f_{bb'}\right)$ strukturerhaltend wegen $f_{bb'}$. Nach der Direct Limit Property ist $f_b^*\colon \pi\left(\gamma_b\right) \to \eta^*$ somit strukturerhaltend für alle $b \in B_\eta$.

Wegen $\lim \eta$ ist $\langle \eta, \in, f_b \rangle_{b \in B_\eta}$ der gerichtete Limes von Z_η. Somit können wir eine Funktion $\pi^*\colon \eta \to \eta^*$ vermöge der Forderung definieren, daß $\pi^* \circ f_b = f_b^* \circ \pi$ für alle $b \in B_\eta$ gilt. Um zu sehen, daß π^* wohldefiniert ist, müssen wir überprüfen, daß die Definition unabhängig von der Wahl von b ist: Angenommen, $b \leq b'$, $\alpha \in \gamma_b$ und $\beta \in \gamma_{b'}$ mit $f_b(\alpha) = f_{b'}(\beta)$, d.h., $f_{bb'}(\alpha) = \beta$. Andererseits haben wir $f_{b'}^* \circ \pi\left(f_{bb'}\right)\left(\pi(\alpha)\right) = f_b^*\left(\pi(\alpha)\right)$. Mit $\pi\left(f_{bb'}\right)\left(\pi(\alpha)\right) = \pi(\beta)$ erhalten wir wie gewünscht $f_b^* \circ \pi(\alpha) = f_{b'}^* \circ \pi(\beta)$.

Weiterhin ist π^* eine Erweiterung von $\pi \restriction \bar{v}$: Für beliebiges $\beta < \bar{v}$ haben wir $b := \langle \beta, \emptyset, \beta \rangle \in B_\eta$, $f_b = \mathrm{id} \restriction \beta$, $f_{bb'} \restriction \beta = \mathrm{id}$ und daher $\pi\left(f_{bb'}\right) \restriction \pi(\beta) = \mathrm{id}$ für alle $b' \geq b$. Dann ist $f_b^* = \mathrm{id} \restriction \pi(\beta)$ und damit $\pi^* \restriction \beta = \pi^* \circ f_b = f_b^* \circ \pi = \pi \restriction \beta$.

Als nächstes zeigen wir $\pi^*\colon \eta \cong \eta^*$, d.h.,

$$\forall i \in \omega \ \forall u \in {}^{<\omega}\eta \ \pi^*\left(M_i^\eta(u)\right) \simeq M_i^{\eta^*}\left(u^*\right),$$

wobei $u^* = \pi^*(u)$:

Zunächst nehmen wir an, daß $y^* := M_i^{\eta^*}\left(u^*\right)\downarrow$. Wähle $b \in B_\eta$, s.d. $y^* \in \operatorname{range} f_b^*$ und $u = f_b\left(u_b\right)$, wobei $u_b \in {}^{<\omega}\gamma_b$. Dann $u^* = \pi^*(u) = \pi^* \circ f_b\left(u_b\right) = f_b^* \circ \pi\left(u_b\right)$. Da f_b^* strukturerhaltend ist, haben wir $y^* = f_b^* \circ M_i^{\pi(\gamma_b)}\left(\pi\left(u_b\right)\right)$. Daher $L_v \models \exists y \in \pi\left(\gamma_b\right) \ M_i^{\pi(\gamma_b)}\left(\pi\left(u_b\right)\right) = y$. Aus der Elementarität von π erhalten wir $L_{\bar{v}} \models \exists y \in \gamma_b \ M_i^{\gamma_b}\left(u_b\right) = y$. Nun, wenn $y_b = M_i^{\gamma_b}\left(u_b\right)$, dann $f_b\left(y_b\right) = M_i^\eta(u)\downarrow$ und $f_b^* \circ \pi\left(y_b\right) = y^*$. Daher $\pi^*\left(M_i^\eta(u)\right) = \pi^* \circ f_b\left(y_b\right) = f_b^* \circ \pi\left(y_b\right) = y^*$ wie gewünscht.

Umgekehrt nehmen wir nun an, daß $M_i^\eta(u)\downarrow$. Wähle wiederum $b \in B_\eta$, s.d. $u = f_b\left(u_b\right)$ und $M_i^\eta(u) = f_b\left(y_b\right)$. Da f_b strukturerhaltend ist, haben wir $y_b = M_i^{\gamma_b}\left(u_b\right)$. Daher erhalten wir $\pi^*\left(M_i^\eta(u)\right) = f_b^* \circ \pi\left(y_b\right) = M_i^{\eta^*}\left(f_b^* \circ \pi\left(u_b\right)\right) = M_i^{\eta^*}\left(u^*\right)$ unter Benutzung von $\pi^*(u) = \pi^* \circ f_b\left(u_b\right) = f_b^* \circ \pi\left(u_b\right)$.

Mittels des folgenden Lemmas (das später bewiesen wird) zeigen wir schließlich die Existenz von $0^\sharp$.

Lemma 1 *Es existieren* $\bar{\upsilon} \in \mathrm{On}$ *und* $\pi\colon L_{\bar{\upsilon}} \to L_\upsilon$ *elementar, s.d.*

i) $X \subset \operatorname{range} \pi$

ii) $\pi \restriction \bar{\upsilon}$ *ist nicht trivial.*

iii) Wenn $\eta \geq \bar{\upsilon}$ *und* $\pi(Z_\eta)$ *existiert, dann ist* $\pi(Z_\eta)$ *wohlfundiert.*

Mit $\bar{\upsilon}$ und π wie im Lemma nehmen wir an, daß $\pi(Z_\eta)$ für ein $\eta \geq \bar{\upsilon}$ (und daher auch für alle $\eta' \geq \eta$) nicht existiert. $\{\eta \geq \bar{\upsilon} \mid \pi(Z_\eta) \text{ existiert}\}$ ist abgeschlossen (für $\lim \eta$ haben wir $B_\eta = \bigcup_{\zeta<\eta} B_\zeta$) und nicht leer ($\pi(Z_{\bar{\upsilon}})$ existiert). Sei η die größte Ordinalzahl, s.d. $\pi(Z_\eta)$ existiert. Wir erhalten die folgenden zwei Eigenschaften für η:

i) $\exists F \in [\eta]^{<\omega}\ \exists \beta < \bar{\upsilon}\ \eta = M^\eta[F \cup \beta]$:

Da $\pi(Z_{\eta+1})$ nicht existiert, gibt es ein $b \in B_{\eta+1}$ mit $\gamma_b \geq \bar{\upsilon}$. Angenommen $\gamma_b < \eta$; dann $b' := \left\langle \gamma_b, f_b^{-1}(F_b), \beta_b \right\rangle \in B_\eta$ und daher $\gamma_{b'} < \bar{\upsilon}$. Unter Benutzung von $\gamma_b = M^{\gamma_b}\left[f_b^{-1}(F_b) \cup \beta_b\right]$ impliziert dies $\gamma_{b'} = \gamma_b < \bar{\upsilon}$, Widerspruch. Daher $\eta \leq \gamma_b < \eta + 1$ und somit $F := f_b^{-1}(F_b)$ und $\beta := \beta_b$ wie gefordert.

ii) $\lim \eta$:

Angenommen, η ist von der Form $\delta + 1$ und H_δ ist aus FSP. Mit F und β wie oben gilt $\delta = \delta \cap M^\eta[F \cup \beta] \subset M^\delta[((F \cup H_\delta) \cap \delta) \cup \beta]$ nach der Finiteness Property. Für $b := \langle \delta, (F \cup H_\delta) \cap \delta, \beta \rangle \in B_\eta$ erhalten wir $\delta = \gamma_b \geq \bar{\upsilon}$, was der Existenz von $\pi(Z_\eta)$ widerspricht.

Schließlich sei $\langle \eta^*, \in, f_b^* \rangle$ der gerichtete Limes von $\pi(Z_\eta)$ und π^* die Erweiterung von π wie in der obigen Konstruktion. Für F und β wie zuvor seien $F^* = \pi^*(F)$ und $\beta^* = \pi^*(\beta)$. Dann $X \subset \operatorname{range} \pi^* = M^{\eta^*}[F^* \cup \beta^*] =: Y$. Daher gilt $Y \in L$ wegen der ZF^--Absolutheit und

$L \models \left(\overline{\overline{Y}} = \max\left(\aleph_0, \overline{\overline{\beta^*}}\right) < \upsilon\right)$. Dies widerspricht iv) vom Beginn des Beweises. Daher existiert $\pi\left(Z_\eta\right)$ für alle $\eta \geq \bar{\upsilon}$.

Für eine Kardinalzahl $\eta \geq \bar{\upsilon}$ konstruiere $\pi^* \colon \eta^+ \to \left(\eta^+\right)^*$ wie oben. Wir erweitern $\pi^* \upharpoonright \eta$ zu einer elementaren Abbildung $\hat{\pi} \colon L_\eta \to L_{\eta^*}$ vermöge $\hat{\pi}\left(A(t)\right) = A\left(\pi^*(t)\right)$, wobei t ein Term vom Rang $< \eta$ sei und $\pi^* \upharpoonright \eta \colon \eta \cong \eta^*$, d.h., $\eta^* = \pi^*(\eta)$:

Zunächst bemerke, daß η als Kardinalzahl P-abgeschlossen ist. Somit gilt $\ulcorner t \urcorner < \eta$ für jeden Term mit $\mathrm{rk}\, t < \eta$. Da $\pi^* \upharpoonright \eta$ eine Kollabierungsfunktion ist, folgt, daß $\hat{\pi}$ wohldefiniert ist (wenn, für Terme t_1 und t_2, $A\left(t_1\right) = A\left(t_2\right)$, dann erhalten wir $T^\eta\left(t_1 = t_2\right)$, daher $T^{\eta^*}\left(\pi^*\left(t_1\right) = \pi^*\left(t_2\right)\right)$, und schließlich $A\left(\pi^*\left(t_1\right)\right) = A\left(\pi^*\left(t_2\right)\right)$). Um zu sehen, daß $\hat{\pi}$ elementar ist, sei $\varphi\left(v_0, \dots, v_{n-1}\right)$ eine Formel der Mengenlehre und $x_0, \dots, x_{n-1} \in L_\eta$. Für $i < n$ wähle Terme t_i aus $\mathcal{L}$ mit $\mathrm{rk}\, t_i < \eta$ und $A\left(t_i\right) = x_i$. Mit Korollar 1 und der Tatsache, daß π^* syntaktische Ausdrücke erhält, gilt die folgende Kette von Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& L_\eta \models \varphi\left[x_0, \dots, x_{n-1}\right] \\
& \text{gdw. } T^{\eta^+}\left(\varphi_\eta\left[t_0, \dots, t_{n-1}\right]\right) = 1 \\
& \text{gdw. } T^{\left(\eta^+\right)^*}\left(\varphi_{\pi^*(\eta)}\left[\pi^*\left(t_0\right), \dots, \pi^*\left(t_{n-1}\right)\right]\right) = 1 \\
& \text{gdw. } L_{\eta^*} \models \varphi\left[\hat{\pi}\left(x_0\right), \dots, \hat{\pi}\left(x_{n-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Daher bleiben Ordinalzahlen Ordinalzahlen, und folglich erweitert $\hat{\pi}$ $\pi^* \upharpoonright \eta$. Schließlich bewegt $\hat{\pi}$ eine Ordinalzahl, da π dies tut. Zusammen mit Bemerkung 2 impliziert dies die Existenz von $0^\sharp$. $\dashv$

Um den Beweis des Covering Lemmas zu beenden, haben wir noch Lemma 1 zu zeigen. Zuvor einige Überlegungen.

Wenn $Z = \left\langle \gamma_b, \in \right\rangle_{b \in B}, \left\langle f_{bb'} \right\rangle_{b \leq b'}$ ein gerichtetes System ist und es eine Folge $\left\langle w_i \right\rangle_{i < \omega}$ gibt, s.d. $\left\langle b_i \right\rangle_{i < \omega} \in {}^\omega B$ existiert mit $w_i \in \gamma_{b_i}$, $b_i \leq b_j$ und $w_j \in f_{b_i b_j}\left(w_i\right)$ für alle $i \leq j$, dann ist Z nicht wohlfundiert ($f_{b_i}\left(w_i\right) = f_{b_j} \circ f_{b_i b_j}\left(w_i\right) >$

$f_{b_j}(w_j)$ für $i < j$). Wir nennen $\langle w_i \rangle_{i<\omega}$ einen *Zeugen für die Nichtwohlfundiertheit von* Z.

Wir fassen die Haupteigenschaften der Konstruktion im Hauptteil des Beweises zusammen, indem wir ein gerichtetes System $Z = \langle \gamma_b, \in \rangle_{b \in B}, \langle f_{bb'} \rangle_{b \leq b'}$, für das das folgende gilt, eine (υ, β)*-Konstruktion* nennen: Für alle $b \in B$ existieren $\beta_b < \gamma_b$ und endliche Mengen $G_b \subset \gamma_b$, s.d.

i) $\gamma_b = M^{\gamma_b}[G_b \cup \beta_b] < \upsilon$,

ii) für $b \leq b'$: $\beta_b \leq \beta_{b'}$, $f_{bb'} \colon \gamma_b \to \gamma_{b'}$ ist strukturerhaltend und $f_{bb'} \restriction \beta_b = \mathrm{id} \restriction \beta_b$,

iii) für alle $b \in B$ gibt es ein $b' \in B$, s.d. $b \leq b'$ und range $f_{bb'}$ nicht konfinal in $\gamma_{b'}$ ist, und

iv) $\beta = \mathrm{lub}\{\beta_b | \, b \in B\} \leq \upsilon$.

Für eine (υ, β)-Konstruktion Z und $Y \preceq L_\upsilon$ schreiben wir $Z \Subset Y$ gdw. $\gamma_b, \beta_b, G_b, f_{bb'} \in Y$ für alle $b, b' \in B$ mit $b \leq b'$. In diesem Fall sei $\pi \colon L_{\bar{\upsilon}} \cong Y$ und $\pi^{-1}(Z)$ das gerichtete System $\langle \pi^{-1}(\gamma_b), \in \rangle_{b \in B}, \langle \pi^{-1}(f_{bb'}) \rangle_{b \leq b'}$. Z heißt Y-*wohlfundiert* gdw. $\pi^{-1}(Z)$ wohlfundiert ist. Dies gilt gdw. es keinen Zeugen $\langle w_i \rangle_{i<\omega}$ für die Nichtwohlfundiertheit von Z gibt, wobei alle $w_i \in Y$.

Schließlich drei vorbereitende Propositionen, bevor wir das Lemma beweisen.

Proposition 4 *Für $Y \preceq L_\upsilon$ und $\beta \leq \upsilon$ seien $\pi \colon L_{\bar{\upsilon}} \cong Y$ und $Z \Subset Y$ eine (υ, β)-Konstruktion, die Y-wohlfundiert, aber nicht wohlfundiert ist. Angenommen $Y \subset Y' \preceq L_\upsilon$, Y' enthält einen Zeugen für die Nichtwohlfundiertheit von Z, $Z' \Subset Y$ ist eine (υ, β')-Konstruktion, wobei $\beta \leq \beta' \leq \upsilon$, δ ist der gerichtete Limes von $\pi^{-1}(Z)$, und $\delta' \geq \delta$ ist der gerichtete Limes von $\pi^{-1}(Z')$, dann ist Z' nicht Y'-wohlfundiert.*

Beweis Um die Situation zu fixieren, seien $Z = \langle \gamma_b, \in \rangle_{b \in B}, \langle f_{bb'} \rangle_{b \leq b'}$ und $Z' = \langle \gamma_b, \in \rangle_{b \in B'}, \langle f_{bb'} \rangle_{b \leq' b'}$, wobei B und B' disjunkt sein sollen. Sei $C = B \cup B'$, und für $b \in C$ mögen $G_b \subset \gamma_b$ und $\beta_b < \gamma_b$ zeigen, daß Z und Z'

(υ, β)- respektive (υ, β')-Konstruktionen sind. Weiterhin seien $\bar{\gamma}_b = \pi^{-1}(\gamma_b)$, $\bar{G}_b = \pi^{-1}(G_b)$, $\bar{\beta}_b = \pi^{-1}(\beta_b)$ und $\bar{f}_{bb'} = \pi^{-1}(f_{bb'})$, wenn $b \leq b'$ oder $b \leq' b'$. Seien $\langle \delta, \in, \bar{f}_b \rangle_{b \in B}$ und $\langle \delta', \in, \bar{f}_b \rangle_{b \in B'}$ die gerichteten Limites von $\pi^{-1}(Z)$ und $\pi^{-1}(Z')$, wobei nach Annahme $\delta \leq \delta'$. Nun definiere $\leq_C$, s.d. $(\leq \cup \leq') \subset \leq_C$ und für $b \in B$ und $b' \in B'$ $b \leq_C b'$, wenn $\bar{\beta}_b \leq \bar{\beta}_{b'}$ und $\operatorname{range} \bar{f}_b \subset \operatorname{range} \bar{f}_{b'}$. In diesem Fall sei $\bar{f}_{bb'} = \bar{f}_{b'}^{-1} \circ \bar{f}_b$.

Mit $\gamma_b = M^{\gamma_b}[G_b \cup \beta_b]$ wissen wir $\bar{\gamma}_b = M^{\bar{\gamma}_b}\left[\bar{G}_b \cup \bar{\beta}_b\right]$. Offenbar ist $\bar{f}_{bb'}$ strukturerhaltend, und $\bar{f}_{bb'} \upharpoonright \bar{\beta}_b = \mathrm{id} \upharpoonright \bar{\beta}_b$. Wie oben ist jedes $\bar{f}_b$ strukturerhaltend.

Als nächstes zeigen wir, daß C eine gerichtete partielle Ordnung ist. Es genügt zu zeigen, daß für alle $b \in B$ ein $b' \in B'$ mit $b \leq_C b'$ existiert. Sei also $b \in B$, und wähle ein $b_1 \in B'$ mit $\beta_b \leq \beta_{b_1}$, was möglich ist, da $\beta \leq \beta'$. Als nächstes wähle ein $b_2 \in B'$, s.d. $b_1 \leq' b_2$ und $\bar{f}_b\left(\bar{G}_b\right) \subset \operatorname{range} \bar{f}_{b_2}$ (beachte, daß $\bar{f}_b\left(\bar{G}_b\right) \subset \delta$ und $\delta' \geq \delta$ der gerichtete Limes von Z' ist). Jetzt beachte, daß es ein $b_3 \in B$ gibt mit $b \leq b_3$ und $\operatorname{range} f_{bb_3}$ nicht konfinal in γ_{b_3} und daher $\operatorname{range} \bar{f}_{bb_3}$ nicht konfinal in $\bar{\gamma}_{b_3}$ ist. Dies impliziert, daß $\operatorname{range} \bar{f}_b$ durch ein Element von $\operatorname{range} \bar{f}_{b_3}$ beschränkt ist und daher nicht konfinal in δ sein kann. Daher können wir ein $b_4 \geq' b_2$ wählen, s.d. $\operatorname{lub}\left(\operatorname{range} \bar{f}_b\right) \in \operatorname{range} \bar{f}_{b_4}$. Schließlich $\operatorname{range} \bar{f}_b \subset M^{\operatorname{lub}\left(\operatorname{range} \bar{f}_b\right)}\left[\bar{f}_b\left(\bar{G}_b\right) \cup \bar{\beta}_b\right] \subset \operatorname{range} \bar{f}_{b_4}$. Somit ist b_4 wie gesucht.

Jetzt ist klar, daß $\bar{Z}_C = \langle \bar{\gamma}_b, \in \rangle_{b \in C}, \langle \bar{f}_{bb'} \rangle_{b \leq_C b'}$ ein gerichtetes System ist. Sei $Z_C = \pi\left(\bar{Z}_C\right)$. Da B' konfinal in $\langle C, \leq_C \rangle$ ist und $\delta' \geq \delta$, haben wir, daß Z' und Z_C denselben gerichteten Limes haben. Sei $\langle w_i \rangle_{i<\omega} \in Y'$ ein Zeuge für die Nichtwohlfundiertheit von Z, s.d. $w_i \in \gamma_{b_i}$ und $w_j \in f_{b_i b_j}(w_i)$, wobei $b_i, b_j \in B$ und $i \leq j$. Wähle $b_i' \in B'$ mit $b_i \leq_C b_i'$ und $\forall j < i\ b_j' \leq' b_i'$ für alle $i < \omega$. Schließlich sei $w_i' = \pi\left(\bar{f}_{b_i b_i'}\right)(w_i)$. $\langle w_i' \rangle_{i<\omega} \in Y'$ ist ein Zeuge für die Nichtwohlfundiertheit von Z'. $\dashv$

Proposition 5 *Für $Y \preceq L_\upsilon$ existiert ein Y' mit $Y \subset Y' \preceq L_\upsilon$, $\overline{\overline{Y'}} = \overline{\overline{Y}} + \aleph_0$ und, wenn $Z \Subset Y$ eine nichtwohlfundierte (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist, dann ist Z nicht Y'-wohlfundiert.*

Beweis Sei $\pi\colon L_{\bar{\upsilon}} \cong Y$. Wir konstruieren Y' per Induktion. Wir beginnen mit $Y_0 = Y$ und $\delta_0 = \mathrm{On}$. Unsere Annahme ist, daß $Y \subset Y_n \preceq L_\upsilon$, δ_n definiert ist, $\overline{\overline{Y}} + \aleph_0 = \overline{\overline{Y_n}}$ und, wenn $Z \Subset Y$ eine nichtwohlfundierte, Y_n-wohlfundierte (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist, dann der gerichtete Limes von $\pi^{-1}(Z)$ in δ_n ist.

Dies ist wahr für $n = 0$. Für $n \geq 0$ ist Y_n entweder wie gefordert, oder es gibt eine nichtwohlfundierte, aber Y_n-wohlfundierte (υ, β)-Konstruktion $Z \Subset Y$ für ein $\beta \leq \upsilon$. In diesem Fall sei β minimal mit dieser Eigenschaft und ein solches Z sowie ein Zeuge für die Nichtwohlfundiertheit von Z fixiert, sagen wir $\langle w_i \rangle_{i<\omega}$. Sei Y_{n+1} die kleinste elementare Substruktur von L_υ mit $Y_n \cup \{w_i \,|\, i \in \omega\} \subset Y_{n+1}$ (daher ist $\overline{\overline{Y_{n+1}}}$ wie gefordert); sei δ_{n+1} der gerichtete Limes von $\pi^{-1}(Z)$. Nach der Induktionsannahme haben wir $\delta_{n+1} \in \delta_n$. Wir müssen überprüfen, daß die Induktionsannahme auch für $n+1$ gilt: Angenommen $Z' \Subset Y$ ist eine nichtwohlfundierte, aber Y_{n+1}-wohlfundierte (υ, β')-Konstruktion für ein $\beta' \leq \upsilon$. Wegen der Minimalität von β haben wir $\beta \leq \beta'$, und daher impliziert die vorangegangene Proposition, daß der gerichtete Limes von $\pi^{-1}(Z')$ in δ_{n+1} ist.

Da die Folge $\langle \delta_n \rangle_{n<\omega}$ streng monoton fallend ist, stoppt die Konstruktion nach endlichen vielen Schritten mit dem gesuchten Y'. $\dashv$

Proposition 6 *Es gibt ein $Y \preceq L_\upsilon$ mit $X \subset Y$ und $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$. Weiterhin, wenn $Z \Subset Y$ eine Y-wohlfundierte (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist, dann ist Z wohlfundiert.*

Beweis Wir konstruieren einen Turm $\langle Y_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ von L_υ-Substrukturen. Die Vereinigung Y_{ω_1} wird das gesuchte Y sein.

Wir beginnen mit der kleinsten elementaren Substruktur Y_0 von L_υ, die X als Teilmenge enthält. Für $\lim \alpha$ sei $Y_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} Y_\gamma$. Für ein gegebenes Y_α erhalten wir $Y_{\alpha+1}$ durch Anwendung der vorstehenden Proposition. Wenn also $Z \Subset Y_\alpha$ eine nichtwohlfundierte (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist, dann ist Z nicht $Y_{\alpha+1}$-wohlfundiert.

Um zu sehen, daß Y_{ω_1} die geforderten Eigenschaften hat, bemerke zunächst, daß $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y_{\omega_1}}}$, da X überabzählbar ist. Es bleibt zu zeigen, daß, wenn $Z \Subset Y_{\omega_1}$ eine nichtwohlfundierte (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist, dann Z nicht Y_{ω_1}-wohlfundiert ist. Sei also Z eine solche nichtwohlfundierte (υ, β)-Konstruktion. Mithilfe eines Zeugen können wir ein abzählbares Teilsystem Z' von Z wählen, s.d. Z' eine nichtwohlfundierte (υ, β')-Konstruktion für ein $\beta' \leq \upsilon$ bleibt. Nun gibt es ein $\alpha < \omega_1$ mit $Z' \Subset Y_\alpha$, und daher ist Z' nicht $Y_{\alpha+1}$-wohlfundiert. Da $Y_{\alpha+1} \subset Y_{\omega_1}$, sind weder Z' noch Z Y_{ω_1}-wohlfundiert. $\dashv$

Beweis (Lemma 1) Sei Y wie in der vorstehenden Proposition definiert, und $\pi\colon L_{\bar{\upsilon}} \cong Y$. Dann ist π wie gewünscht. Nach Konstruktion ist $X \subset \operatorname{range} \pi$. π bewegt eine Ordinalzahl, da $X \subset \operatorname{range} \pi$ konfinal in υ ist, aber $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} < \overline{\overline{\upsilon}}$. Es bleibt zu zeigen, daß, wenn $\eta \geq \bar{\upsilon}$ und $\pi\left(Z_\eta\right)$ existieren, dann $\pi\left(Z_\eta\right)$ wohlfundiert ist.

Erinnere, daß, wenn $\pi\left(Z_\eta\right)$ existiert, es dann eine Limesordinalzahl $\eta' \geq \eta$ gibt, s.d. $\pi\left(Z_{\eta'}\right)$ existiert. Zusätzlich ist $\pi\left(Z_{\eta'}\right)$ eine (υ, υ)-Konstruktion; um dies zu sehen, benutze $\lim \eta'$, $\left\langle \beta_b \,\middle|\, b \in B_{\eta'} \right\rangle$ konfinal in $\bar{\upsilon}$ und $\operatorname{range} \pi$ konfinal in υ. Weiterhin ist $\pi\left(Z_{\eta'}\right)$ Y-wohlfundiert, da $Z_{\eta'}$ wohlfundiert ist. Daher ist $\pi\left(Z_{\eta'}\right)$ wohlfundiert nach der vorstehenden Proposition. Schließlich ist das selbe auch für beliebiges $\pi\left(Z_{\eta''}\right)$ wahr, wobei $\eta'' \leq \eta'$, und daher für $\pi\left(Z_\eta\right)$. $\dashv$

Dies vervollständigt den Beweis des Covering Lemmas.

Starkes Covering Lemma

Satz 7 (Starkes Covering Lemma) *Angenommen $0^\sharp$ existiert nicht, und $M \in V$ sei ein Modell mit Universum $\alpha \subset \mathrm{On}$ und abzählbarer Länge. Dann gibt es für jedes überabzählbare $X \subset \alpha$ ein $Y \in L$, s.d. $M \restriction Y \preceq M$, $X \subset Y \subset \alpha$ und $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$.*

Bevor wir den Satz beweisen, einige wohlbekannte Definitionen.

Definition 18 Seien $\alpha \in \mathrm{On}$, κ eine Kardinalzahl und $X \subset [\alpha]^\kappa$.

i) X heißt *unbeschränkt*† gdw. $\forall y \in [\alpha]^\kappa\, \exists x \in X\ y \subset x$.

ii) X heißt *abgeschlossen*† gdw. für $\{x_\gamma \,|\gamma < \kappa \wedge \forall \beta < \gamma\ x_\beta \subset x_\gamma\} \subset X$ auch $\bigcup\limits_{\gamma<\kappa} x_\gamma \in X$.

iii) X heißt *abgeschlossen-unbeschränkt*† (*club*) gdw. X abgeschlossen und unbeschränkt ist.

iv) X heißt *stationär*† gdw. X und Y für alle club Teilmengen Y von $[\alpha]^\kappa$ nicht disjunkt sind.

Beweis Sei eine Situation wie im Satz gegeben, und es sei $\kappa = \overline{\overline{X}}$. Als erstes zeigen wir, daß die folgende Menge club ist:

$$A = \{Y \,|X \subset Y \wedge Y \in [\alpha]^\kappa \wedge M\restriction Y \preceq M\}$$

A ist unbeschränkt nach Löwenheim-Skolem abwärts: Angenommen $y \in [\alpha]^\kappa$, dann gibt es ein $Y \supset X \cup y$ mit $M\restriction Y \preceq M$ und $\overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{X \cup y}} = \kappa$ (Beachte, daß die Länge von M abzählbar und daher kleiner als $\aleph_1 \leq \kappa$ ist).

Um zu sehen, daß A abgeschlossen ist, beachte, daß jede Menge $\{Y_\gamma \,|\gamma < \kappa \wedge \forall \beta < \gamma\ Y_\beta \subset Y_\gamma\} \subset A$ eine elementare Kette und daher die Vereinigung wie gewünscht ist.

† genauer *in* $[\alpha]^\kappa$, was wir aber auslassen, wenn dies aus dem Kontext klar wird

Als nächstes zeigen wir, daß $B_\upsilon^\lambda = \left\{Y \in L \middle| Y \in [\upsilon]^\lambda\right\}$ stationär in $[\upsilon]^\lambda$ für alle Ordinalzahlen $\upsilon \geq \lambda$ und überabzählbare Kardinalzahlen λ ist.

Angenommen nicht. Sei υ minimal, s.d. für eine überabzählbare Kardinalzahl λ eine club Menge $C \in [\upsilon]^\lambda$ mit $B_\upsilon^\lambda \cap C = \emptyset$ existiert. Fixiere λ und C. Ähnlich wie im Beweis des Covering Lemmas erhalten wir:

i) $\aleph_0 < \lambda < \overline{\overline{\upsilon}}$

ii) $L \models$ „υ ist eine Kardinalzahl"
Angenommen nicht, und es seien $\mu = \overline{\overline{\upsilon}}^L$ und $f\colon \mu \leftrightarrow \upsilon$, wobei $f \in L$. Da $\bar{C} := \left\{f^{-1}[c] \middle| c \in C\right\}$ club in $[\mu]^\lambda$ ist mit $\mu < \upsilon$, existiert ein $\bar{c}_0 \in \bar{C} \cap L$. Daher $c_0 := f[\bar{c}_0] \in C \cap L$.

Ausgehend von einem elementaren $\pi\colon L_{\bar{\upsilon}} \to L_\upsilon$ konstruieren wir π^* wie oben. Erneut brauchen wir ein

Lemma 2 *Es gibt $\bar{\upsilon} \in \mathrm{On}$ und $\pi\colon L_{\bar{\upsilon}} \to L_\upsilon$ elementar, s.d.*

i) $\operatorname{range} \pi \cap \upsilon \in C$

ii) $\pi \restriction \bar{\upsilon}$ ist nicht trivial.

iii) Wenn $\eta \geq \bar{\upsilon}$ und $\pi(Z_\eta)$ existiert, dann ist $\pi(Z_\eta)$ wohlfundiert.

Mit π wie im Lemma nehmen wir an, daß $\pi(Z_\eta)$ für ein $\eta \geq \bar{\upsilon}$ nicht existiert. Wir erhalten $\operatorname{range} \pi^* \in L$ und daher $\operatorname{range} \pi^* \cap \upsilon \in C \cap L$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Folglich existiert $\pi(Z_\eta)$ für alle $\eta \geq \bar{\upsilon}$. Erneut konstruieren wir $\hat{\pi}\colon L_\eta \to L_{\eta^*}$ für eine Kardinalzahl η, und $0^\sharp$ existiert.

Schließlich ist B_α^κ stationär und $Y \in A \cap B_\alpha^\kappa$ die gesuchte Menge. $\dashv$

Um Lemma 2 zu zeigen, müssen wir einige Ergebnisse aus dem Beweis des Covering Lemmas verstärken.

Proposition 7 *Für $Y \preceq L_\upsilon$ und $U \subset \upsilon$ mit $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{Y}}$ existiert ein Y' mit $Y \cup U \subset Y' \preceq L_\upsilon$, $\overline{\overline{Y'}} = \overline{\overline{Y}} + \aleph_0$ und, wenn $Z \Subset Y$ eine nichtwohlfundierte*

(υ, β)*-Konstruktion für ein* $\beta \leq \upsilon$ *ist, dann ist* Z *nicht* Y'*-wohlfundiert.*

Beweis Im Beweis von Proposition 5 sei Y_0 die kleinste elementare Substruktur von L_υ mit $Y \cup U \subset Y_0$. $\dashv$

Proposition 8 *Es gibt ein* $Y \preceq L_\upsilon$ *mit* $Y \cap \upsilon \in C$ *und* $\overline{\overline{Y}} = \lambda$. *Weiterhin, wenn* $Z \Subset Y$ *eine* Y*-wohlfundierte* (υ, β)*-Konstruktion für ein* $\beta \leq \upsilon$ *ist, dann ist* Z *wohlfundiert.*

Beweis Wir konstruieren einen Turm $\langle Y_\alpha \rangle_{\alpha < \omega_1}$ von L_υ-Substrukturen. Die Vereinigung Y_{ω_1} ergibt das gesuchte Y.

Zu Anfang wähle ein Element von C, sagen wir c, und es sei Y_0 die kleinste elementare Substruktur von L_υ, die c als Teilmenge enthält. Für $\lim \alpha$ sei $Y_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma < \alpha} Y_\gamma$. Für ein gegebenes Y_α erhalten wir $Y_{\alpha+1}$ durch Anwendung der vorstehenden Proposition auf Y_α und $c_\alpha \in C$ mit $Y_\alpha \cap \upsilon \subset c_\alpha$. Daher, wenn $Z \Subset Y_\alpha$ eine nichtwohlfundierte (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist, dann ist Z nicht $Y_{\alpha+1}$-wohlfundiert.

Um zu sehen, daß Y_{ω_1} wie gesucht ist, berücksichtige zunächst, daß $\overline{\overline{Y_{\omega_1}}} = \lambda$, da λ überabzählbar ist. Der Beweis, daß, wenn $Z \Subset Y_{\omega_1}$ eine nichtwohlfundierte (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist, dann Z nicht Y_{ω_1}-wohlfundiert ist, ist derselbe wie in Proposition 6. Schließlich ist $Y \cap \upsilon = \bigcup\limits_{\alpha < \omega_1} c_\alpha \in C$, da C abgeschlossen ist. $\dashv$

Beweis (Lemma 2) Sei Y wie in der vorstehenden Proposition und $\pi \colon L_{\bar{\upsilon}} \cong Y$. Dann ist π wie gesucht. Nach Konstruktion ist $\operatorname{range} \pi \cap \upsilon \in C$. $\pi \restriction \upsilon$ bewegt eine Ordinalzahl, da $\operatorname{range} \pi \cap \upsilon \in C \setminus L$ nach Annahme. Der Beweis, daß, wenn $\eta \geq \bar{\upsilon}$ und $\pi(Z_\eta)$ existiert, dann $\pi(Z_\eta)$ wohlfundiert ist, ist wie in Lemma 1, abgesehen davon, daß $\pi\left(Z_{\eta'}\right)$ eine (υ, β)-Konstruktion für ein $\beta \leq \upsilon$ ist (wir verlieren die Konfinalität von $\operatorname{range} \pi$ in υ). $\dashv$

Dies vervollständigt den Beweis des Starken Covering Lemmas.

Literatur

[1] Keith J. Devlin. *Constructibility.* Springer, 1984.

[2] Frank R. Drake. *Set Theory.* North-Holland, 1974.

[3] Marco Finis. *Silver Machines (Titeländerung möglich).* Diplomarbeit, Universität Bonn, in Vorbereitung.

[4] Thomas Lloyd Richardson. *Silver Machine Approach to the Constructible Universe.* Dissertation, University of California, Berkeley, 1979.

[5] Sy D. Friedman und Peter Koepke. *An Elementary Approach to the Fine Structure of L.* In Vorbereitung.

Index